第 2 节 三角函数图象的变换（★★）

强化训练

1．（2022・成都模拟・★）要得到函数 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ 的图象，只需要将函数 $y=\cos 2x$ 的图象（　　）

（A）向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位　　（B）向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

（C）向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位　　（D）向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

答案：B

解析：先将系数化 1， $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})=\cos 2(x-\frac{\pi}{8})$，在 $y=\cos 2x$ 中将 x 换成 $x-\frac{\pi}{8}$ 即得 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$，

所以将 $y=\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 可得 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ 的图象.

2．（2022・山西模拟・★★）为了得到函数 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象，需把函数 $y=\sin 2x$ 的图象上的所有点至少向左平移_____个单位.

答案：$\frac{\pi}{6}$

解析：先化同名，二者 x 的系数相同，可利用 $\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ 将余弦化正弦，

$y=\cos(2x-\frac{\pi}{6})=\sin[\frac{\pi}{2}+(2x-\frac{\pi}{6})]=\sin 2(x+\frac{\pi}{6})$，在 $y=\sin 2x$ 中将 x 换成 $x+\frac{\pi}{6}$ 即得 $y=\sin 2(x+\frac{\pi}{6})$，

所以将 $y=\sin 2x$ 的图象至少向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，可以得到 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象.

3．（2022・潍坊模拟・★★）为了得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，需把 $y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$ 的图象上所有点至少向右平移_____个单位.

答案：$\frac{5\pi}{24}$

解析：函数名相同，x 的系数相反，得先将 x 的系数化为相同，可用 $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$ 来化，

$y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=\sin[\pi-(\frac{\pi}{4}-2x)]=\sin(2x+\frac{3\pi}{4})=\sin 2(x+\frac{3\pi}{8})$， $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin 2(x+\frac{\pi}{6})$，

为了看出平移的量，可用 $x+\frac{3\pi}{8}$ 与 $x+\frac{\pi}{6}$ 作差，因为 $(x+\frac{3\pi}{8})-(x+\frac{\pi}{6})=\frac{5\pi}{24}$，所以 $(x-\frac{5\pi}{24})+\frac{3\pi}{8}=x+\frac{\pi}{6}$，

即在 $y=\sin 2(x+\frac{3\pi}{8})$ 中将 x 换成 $x-\frac{5\pi}{24}$，可得到 $y=\sin 2(x+\frac{\pi}{6})$，

故至少把 $y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位，可以得到 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象.

4.（2022·河南模拟·★★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，且满足 $f(x+\varphi)=f(\varphi-x)$，则要得到函数 $f(x)$ 的图象，可将 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象（　　）

（A）向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度　　（B）向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

（C）向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　　（D）向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

答案：D

解析：由题意，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$，故 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，$g(x)=\cos 2x$，

又 $f(x+\varphi)=f(\varphi-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\varphi$ 对称，从而 $2\varphi+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，故 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

为了看出平移的量，先化同名，两者 x 的系数相同，可用 $\sin\alpha=\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})$ 将 $f(x)$ 化余弦，

$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\cos[(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{2}]=\cos(2x-\frac{\pi}{3})=\cos 2(x-\frac{\pi}{6})$，

所以将 $g(x)=\cos 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得到 $f(x)$ 的图象.

5.（2022·厦门模拟·★★）将 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移两个单位，最后将所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，则所得的函数图象的解析式为（　　）

（A）$y=\sin(x+\frac{2\pi}{3})+2$　（B）$y=\sin(4x-\frac{2\pi}{3})+2$　（C）$y=\cos 4x+2$　（D）$y=\sin(4x+\frac{2\pi}{3})+2$

答案：D

解析：将 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 左移 $\frac{\pi}{6}$，得到 $y=\sin[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$；

再上移 2 个单位，得到 $y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})+2$；最后横坐标变为 $\frac{1}{2}$ 倍，得到 $y=\sin(4x+\frac{2\pi}{3})+2$.

6.（2022·南阳模拟·★★★）若将函数 $y=\tan(\omega x-\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后，与函数 $y=\tan(\omega x-\frac{\pi}{3})$ 的图象重合，则 ω 的最小值为_____.

答案：1

解析：将函数 $y=\tan(\omega x-\frac{\pi}{4})$ 右移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，得到 $y=\tan[\omega(x-\frac{\pi}{12})-\frac{\pi}{4}]=\tan(\omega x-\frac{\omega\pi}{12}-\frac{\pi}{4})$ 的图象，

由题意，该图象与 $y=\tan(\omega x-\frac{\pi}{3})$ 的图象重合，两个函数的图象重合，则解析式必定可以互化，

所以 $\tan(\omega x-\frac{\omega\pi}{12}-\frac{\pi}{4})=\tan(\omega x-\frac{\pi}{3})$，从而 $\omega x-\frac{\omega\pi}{12}-\frac{\pi}{4}-(\omega x-\frac{\pi}{3})=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 $\omega=1-12k$，

又 $\omega>0$，所以 ω 的最小值为 1.

【反思】 若 $\tan\alpha=\tan\beta$，则 $\alpha-\beta=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

7.（2022·安徽模拟·★★★）（多选）为了得到 $y=2\tan(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把 $y=2\tan(\frac{\pi}{4}-2x)$ 的图象（　　）

（A）先沿 x 轴翻折，再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

（B）先沿 x 轴翻折，再向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位

（C）先沿 y 轴翻折，再向右平移 $\frac{7\pi}{24}$ 个单位

（D）先沿 y 轴翻折，再向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位

答案： BC

解析： A 项，将 $f(x)$ 沿 x 轴翻折，得到的是 $-f(x)$，

将 $y=2\tan(\frac{\pi}{4}-2x)$ 沿 x 轴翻折，得到 $y=-2\tan(\frac{\pi}{4}-2x)=2\tan(2x-\frac{\pi}{4})=2\tan 2(x-\frac{\pi}{8})$ ①，

而 $y=2\tan(2x-\frac{\pi}{3})=2\tan 2(x-\frac{\pi}{6})$ ②，为了看出由①到②的平移量，可将括号内的部分作差，

因为 $(x-\frac{\pi}{8})-(x-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{24}$，所以 $(x-\frac{\pi}{24})-\frac{\pi}{8}=x-\frac{\pi}{6}$，

即在 $y=2\tan 2(x-\frac{\pi}{8})$ 中将 x 换成 $x-\frac{\pi}{24}$，可得到 $y=2\tan 2(x-\frac{\pi}{6})$，

所以把 $y=2\tan 2(x-\frac{\pi}{8})$ 右移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位，得到 $y=2\tan(2x-\frac{\pi}{3})$，故 A 项错误，B 正确；

C 项，将 $f(x)$ 沿 y 轴翻折，得到的是 $f(-x)$，

将 $y=2\tan(\frac{\pi}{4}-2x)$ 沿 y 轴翻折，得到 $y=2\tan[\frac{\pi}{4}-2(-x)]=2\tan(\frac{\pi}{4}+2x)=2\tan 2(x+\frac{\pi}{8})$，

同上述分析方法可知将 $y=2\tan 2(x+\frac{\pi}{8})$ 右移 $\frac{7\pi}{24}$ 个单位，得到 $y=2\tan(2x-\frac{\pi}{3})$，故 C 项正确，D 项错误.

8.（2022·石嘴山模拟·★★★）已知 $f(x)=\sin x+\cos x$，设 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则下列结论错误的是（　　）

（A）将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位，可得到 $f'(x)$ 的图象

（B）将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{3\pi}{2}$ 个单位，可得到 $f'(x)$ 的图象

（C） $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称

（D） $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图象关于 y 轴对称

答案： C

解析： 由题意， $f'(x)=\cos x-\sin x$，

为了判断选项，需将 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 的解析式各自合并，且合并为余弦可使 x 的系数相同，

$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\dfrac{\pi}{4})$， $f'(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$，

A 项，将 $f(x)$ 左移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位，得到 $y=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$，故 A 项正确；

B 项，将 $f(x)$ 右移 $\dfrac{3\pi}{2}$ 个单位，得到 $y=\sqrt{2}\cos(x-\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(x-\dfrac{7\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})$，故 B 项正确；

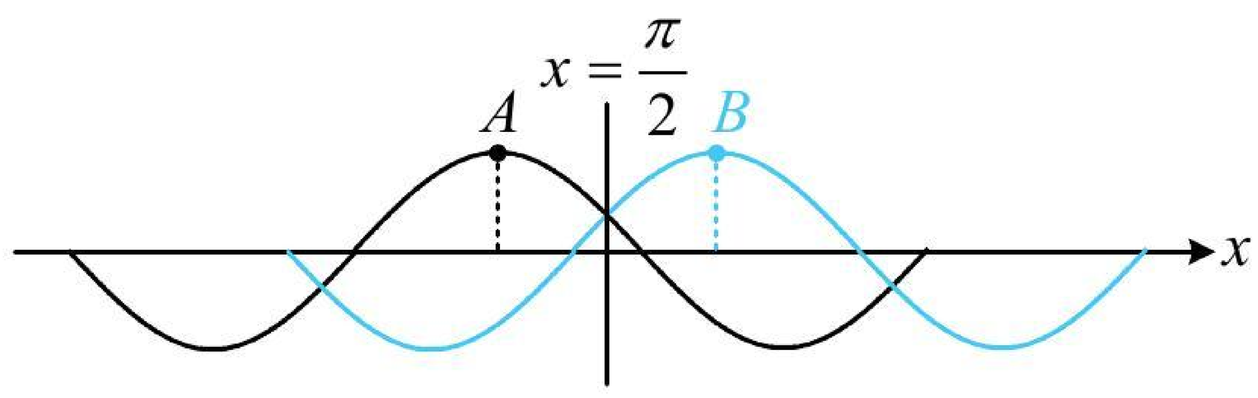
C 项，如图，关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称的两个函数的最大值点必关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，故可在 $f(x)$ 的图象上取一个最大值点，看它关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 的对称点在不在 $f'(x)$ 的图象上，

因为 $f(\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，所以 $A(\dfrac{\pi}{4},\sqrt{2})$ 是 $f(x)$ 图象上的一个点，它关于 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 的对称点为 $B(\dfrac{3\pi}{4},\sqrt{2})$，

而 $f'(\dfrac{3\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(\dfrac{3\pi}{4}+\dfrac{\pi}{4})=-\sqrt{2}\neq\sqrt{2}$，所以点 B 不在 $f'(x)$ 的图象上，从而 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图象不关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，故 C 项错误；

D 项，两个图象关于 y 轴对称意思是自变量相反时，它们的函数值相等，故就看 $f(-x)=f'(x)$ 是否成立，

$f(-x)=\sqrt{2}\cos(-x-\dfrac{\pi}{4})=\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})=f'(x)$，所以 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故 D 项正确.



【反思】 $f(x)$ 与 $g(x)$ 关于 y 轴对称可翻译为 $g(x)=f(-x)$，画图即可知原理；若关于 x 轴对称，则 $g(x)=-f(x)$.

9.（2022 • 山西三模 • ★★★）将曲线 $C:y=\sin 2x+\cos 2x$ 向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度得到曲线 C_1，将曲线 C 向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位长度得到曲线 C_2，若 C_1 与 C_2 关于 x 轴对称，则 φ 的最小值为（　　）

（A） $\dfrac{\pi}{4}$　　（B） $\dfrac{\pi}{2}$　　（C） $\dfrac{2\pi}{3}$　　（D） $\dfrac{3\pi}{4}$

答案： A

解析：先由题干的平移关系求出 C_1 和 C_2 的解析式，由题意，曲线 C 的方程可化为 $y=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，

将曲线 C 左移 $\frac{\pi}{4}$，得到 $y=\sqrt{2}\sin[2(x+\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}]=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{3\pi}{4})$，所以 $C_1: y=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{3\pi}{4})$，

将曲线 C 右移 φ 个单位，得到 $y=\sqrt{2}\sin[2(x-\varphi)+\frac{\pi}{4}]=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}-2\varphi)$，故 $C_2: y=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}-2\varphi)$，

因为 C_1 与 C_2 关于 x 轴对称，所以 $\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}-2\varphi)=-\sqrt{2}\sin(2x+\frac{3\pi}{4})$，故 $\sin(2x+\frac{\pi}{4}-2\varphi)=-\sin(2x+\frac{3\pi}{4})$，

为了求 φ，可先用 $-\sin\alpha=\sin(\pi+\alpha)$ 把右侧的“$-$”化掉，

因为 $-\sin(2x+\frac{3\pi}{4})=\sin[\pi+(2x+\frac{3\pi}{4})]=\sin(2x+\frac{7\pi}{4})$，所以 $\sin(2x+\frac{\pi}{4}-2\varphi)=\sin(2x+\frac{7\pi}{4})$，

从而 $(2x+\frac{\pi}{4}-2\varphi)-(2x+\frac{7\pi}{4})=2k\pi$，故 $\varphi=-\frac{3\pi}{4}-k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $\varphi>0$，所以 $\varphi_{\min}=\frac{\pi}{4}$.

【反思】①若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于 x 轴对称，则 $f(x)=-g(x)$；②若 $\sin(\omega x+\varphi_1)=\sin(\omega x+\varphi_2)(\omega\neq 0)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都成立，则 $\omega x+\varphi_1$ 和 $\omega x+\varphi_2$ 之间一定相差了 2π 的整数倍.